Τέλος απόδειξης Θ. Schwarz:

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

$$\left.\begin{array}{l} \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R},\ \forall i = 1, \dots, n \\ \exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: U \to \mathbb{R},\ j \neq i \\ \text{και είναι συνεχής στο } \bar{x} \in U \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})$$

Εφαρμογή

$$f \in C^2(U) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0$ έτσι ώστε

$\forall h, k \neq 0$ με $\|(h,k)\| < \delta$, να αρκεί να δείξουμε ότι

$\exists \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ με $\dfrac{\Phi(k)}{hk} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x} + \theta_1 h \bar{e}_j + \theta_2 k \bar{e}_j)$

όπου $\Phi(k) = f(\bar{x} + h\bar{e}_i + k\bar{e}_j) - f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x} + k e_i) + f(\bar{x})$

Θεωρώ τη συνάρτηση:

$\phi(l) = f(\bar{x} + l\bar{e}_i + k\bar{e}_i) - f(\bar{x} + l e_i)$

$$\Rightarrow \phi'(l) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + l\bar{e}_i + k\bar{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + l\bar{e}_i)$$

$$\Rightarrow \Phi(k) = \phi(h) - \phi(0) \overset{\text{ΘΜΤ.}}{=\!=\!=} h \cdot \phi'(\theta_1 h) =$$

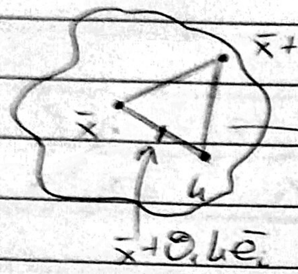
$$= h\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} - \theta_1 h\bar{e}_i + k\bar{e}_2)}_{\psi(k)} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + \theta_1 h\bar{e}_i)}_{\psi(0)}\Big)$$

Θεωρούμε τώρα: $\psi(w) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + \theta_1 h\bar{e}_i + w e_j)$

$$\Rightarrow \psi'(w) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x} + \theta_1 h\bar{e}_i + w\bar{e}_j)$$

Από ΘΜΤ έχουμε:

$$\Delta(h) = h(\psi(k)-\psi(0)) = hk\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}+\theta_1 \bar{e}_i+\theta_2 k\bar{e}_j)$$



__Πόρισμα:__

$f\in C^k(U) \to$ μπορούμε να γράφουμε όλες τις μερικές παραγώγους μέχρι και k τάξης __με όποια σειρά θέλουμε__ (πόρισμα του πορίσματος): Αν $f\in C^\infty(U)$, αυτό ισχύει για μερ. παραγ. οποιασδήποτε τάξης.

__Θεώρημα Taylor:__

(για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών)

__Ορισμός:__

Το διάνυσμα $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n$ ονομάζεται __πολυδείκτης__ (multi-index) τάξης $|a|=a_1+\dots+a_n$, με $a!=a_1!\dots a_n!$

και για $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται $\bar{x}^a=(x_1,\dots,x_n)^{(a_1,\dots,a_n)}=x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$

και για $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό

$\bar{x}\in U$ $\quad D^a f(\bar{x})=\frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}\dots\partial x_n^{a_n}}f(\bar{x})$, δηλ. ουσιαστικά ο πολυδείκτης μας λέει πόσες φορές θα παραγωγίσουμε ως προς την i μεταβλητή (a_i φορές) για κάθε $i=1,\dots,n$

__Πρόταση:__

~~Έστω~~ Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f\in C^k(U)$, $\bar{x}\in U$, $\bar{u}\in\mathbb{R}^n$ με $\{\bar{x}+t\bar{u}: t\in[0,1]\}\subset U$. Τότε η $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(t)=f(\bar{x}+t\bar{u})$ είναι k φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ισχύει

$$g^{(k)}(t)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}(\bar{x}+t\bar{u})$$

απόδειξη

Αποδεικνύουμε επαγωγικά ως προς κ.

κ=1: $g'(t) = \frac{d}{dt}\left(f(\bar{x}+t\bar{u})\right) = \nabla f(\bar{x}+t\bar{u})\bar{u} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+t\bar{u})u_i$

$$\boxed{\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(\bar{x}+t\bar{u}) = \frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}\right]}$$

κ→κ+1:

Έστω ότι για κάποιο $\nu \geq 2$ κ ισχύει

$g^{(\nu-1)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_{\nu-1}}^{n} \frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{\nu-1}}}(\bar{x}+t\bar{u})u_{i_1}\dots u_{i_{\nu-1}}$

$\Rightarrow g^{(\nu)}(t) = \sum \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x_1\dots\partial x_\nu}(\bar{x}+t\bar{u})\right)}u_{i_1}\dots u_{i_\nu}$

$= \nabla \frac{\partial^{\nu-1} f}{\dots}(\bar{x}+t\bar{u})\bar{u}$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial^{\nu-1} f}{\dots}(\bar{x}+t\bar{u})u_{i_\nu}$

$= \sum_{i_1,\dots,i_\nu=1}^{n} \frac{\partial^{\nu} f}{\partial x_1\dots\partial x_{\nu-1}}(\bar{x}+t\bar{u})$

Πρόταση:

Υπό τις ίδιες προϋποθέσεις και συμβολισμούς έχουμε

$g^{(k)}(t) = \sum_{|a|=k} \frac{k!}{a!} D^a f(\bar{x}+t\bar{u})\bar{u}^a, \quad \forall t \in [0,1]$

$\bar{u}^a = u_1^{a_1}\dots u_n^{a_n}$

$D^a f(\bar{x}+t\bar{u}) = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1}\dots\partial x_n^{a_n}}(\bar{x}+t\bar{u})$

απόδειξη

Έστω $S(i_1,\dots,i_k) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}(\bar{x}+t\bar{u})u_{i_1}\dots u_{i_k}$

για κάθε επιλογή κ δεικτών.

$(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k$ από τις οποίες $a_\nu \in \{0,\dots,k\}$ δείκτες παίρνουν την τιμή $\nu \in \{1, \ldots, n\}$

και άρα παράγουν έναν πολυδείκτη $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^k$

τάξης $|\alpha| = k$.

Κάθε τέτοιο διάνυσμα α είναι το ίδιο για $\dfrac{k!}{\alpha!} = \dfrac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$

διαφορετικές επιλογές (δηλ. πιθανότητες) k δεικτών $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}$

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει το εξής (αν θυμηθούμε ότι σύμφωνα με το Θ. Schwarz ότι για όλες τις επιλογές το ίδιο α ισχύει

$$S(i_1, \ldots, i_k) = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} (\bar{x} + t\bar{u})\, u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} =$$

$$= D^\alpha f(\bar{x} + t\bar{u})\, \bar{u}^\alpha)$$

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \ldots i_k = 1}^{k} S(i_1, \ldots, i_k) = \sum \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(\bar{x} + t\bar{u})\, \bar{u}^\alpha$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Εδώ αθροίζουμε πάνω από διαφορετικά α.